

Категорія С старші курси

1. Нехай $[x]$ та $\lceil x \rceil$ означають найбільше ціле число з проміжку $(-\infty, x]$ та найменше ціле число з проміжку $[x, \infty)$ відповідно. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$P_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \quad \text{та} \quad Q_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil.$$

Знайти $Q_{2022} - P_{2022}$.

2. Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти всі дійсні числа x , при яких

$$A + A^2 + A^3 + \dots = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Прямий круговий циліндр перетнули площиною, яка проходить під кутом 30° до його осі. Знайдіть ексцентриситет утвореного при перетині еліпса.

4. Обчислити

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{2022}}}.$$

5. Знайдіть всі такі диференційовані функції $f(x)$, $x \in (0, 1)$, що для кожного $x \in \mathbb{R}$

$$f'(\sin^2 x) = 3 - \cos 2x + 2 \operatorname{tg}^2 x.$$

6. Про многочлен $P(x)$ відомо, що $P(1) = 2021$, $P'(1) = 2022$. Знайдіть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{P(1)} \right)^n.$$